Quesito 8

Per rispondere al quesito non serve svolgere esplicitamente la divisione. Occorre invece conoscere il significato di *quoziente* della divisione tra due polinomi.

Esaminiamo prima un esempio numerico. Dire che la divisione $12 : 3$ ha come quoziente q significa che

$$q \cdot 3 = 12.$$

Pertanto in questo caso il quoziente è $q = 4$.

Consideriamo invece la divisione indicata nel testo del quesito

$$(\sqrt{2}x^3 - x^2 + (2 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2}) : (x - \sqrt{2})$$

Analogamente al caso numerico, un polinomio $p(x)$ è il *quoziente* di tale divisione se vale

$$p(x) \cdot (x - \sqrt{2}) = \sqrt{2}x^3 - x^2 + (2 - \sqrt{2})x - 2\sqrt{2} \quad (*).$$

Perciò, per affrontare il quesito, si può pensare di svolgere esplicitamente le moltiplicazioni

$$p(x) \cdot (x - \sqrt{2}),$$

sostituendo a $p(x)$ di volta in volta ciascuno dei polinomi proposti quali alternative di risposta.

Iniziamo dal polinomio $p(x) = 2x^2 + x + \sqrt{2}$. Effettuando i calcoli si ottiene

$$(2x^2 + x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}) = 2x^3 + (-2\sqrt{2} + 1)x^2 - 2.$$

Possiamo così vedere che il polinomio $2x^2 + x + \sqrt{2}$ non verifica la condizione $(*)$, dunque esso non è il quoziente cercato.

Può venire in mente un modo più rapido per rispondere, se si osserva che $\sqrt{2}x^3$ si ottiene moltiplicando per x l'addendo di $p(x)$ che ha grado massimo. Quindi l'addendo di grado massimo di $p(x)$ è $\sqrt{2}x^2$. Le sole alternative compatibili con tale richiesta sono l'alternativa A o la B.

Per decidere quale tra le due rappresenta la risposta corretta conviene invece tornare a svolgere le moltiplicazioni $p(x) \cdot (x - \sqrt{2})$. Si dovrebbe vedere in poco tempo che l'alternativa A e solo essa verifica la condizione $(*)$. Dunque la risposta è A.

Resto della divisione tra polinomi

Per rispondere al quesito abbiamo precisato il significato di quoziente della divisione tra due polinomi. Vediamo ora di precisare anche il significato del termine *resto* di una divisione.

Dire che la divisione $7:3$ ha *quoziente* q e *resto* r (che deve essere < 3) significa che possiamo esprimere il numero 7 nella forma

$$7 = q \cdot 3 + r.$$

Inoltre i numeri q ed r sono *univocamente determinati* da tali condizioni.

Per i polinomi vale un risultato analogo.
Sono dati due polinomi $a(x)$ e $b(x)$ a coefficienti reali. Supponiamo che $b(x)$ sia, tra i due, quello di grado minore e non sia il polinomio nullo.
Esiste un polinomio $q(x)$ ed un polinomio $r(x)$, che ha grado minore di quello di $b(x)$, tali che

$$a(x) = q(x)b(x) + r(x). \quad (**)$$

Inoltre $q(x)$ ed $r(x)$ sono univocamente determinati da tali condizioni e si dicono rispettivamente *polinomio quoziente* e *polinomio resto* della divisione.

Resto della divisione e radici di polinomi

ll resto della divisione

$$(\sqrt{2}x^3 - x^2 + (2-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}) : (x - \sqrt{2})$$

è uguale a 0.
Questo significa che il polinomio $\sqrt{2}x^3 - x^2 + (2-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$ è divisibile per $x - \sqrt{2}$.

Per provarlo basta declinare l'uguaglianza $(**)$ nel caso in esame:

$$\sqrt{2}x^3 - x^2 + (2-\sqrt{2})x - 2\sqrt{2} = q(x) \cdot (x - \sqrt{2}) + r.$$

Notiamo, tra le altre cose, che il resto di questa divisione è un *numero*, visto che esso deve avere grado minore del polinomio $x - \sqrt{2}$.

Questa uguaglianza vale per ogni x reale e quindi anche per $x = \sqrt{2}$. Sostituendo tale valore essa si riduce a

$$0 = q(x) \cdot 0 + r.$$

Dunque

$$r = 0.$$