Quesito 7

Iniziamo ricordando che due equazioni si dicono *equivalenti* se l'insieme delle soluzioni di una è uguale a quello dell'altra.

Risolviamo allora l'equazione in esame
$$x^2 = a^2.$$
Essa ha due soluzioni: $\sqrt{a^2}$ e $-\sqrt{a^2}$. In altre parole, l'*insieme* S delle sue soluzioni è
$$S = \left\{-\sqrt{a^2}, \sqrt{a^2}\right\} = \{-a, a\}.$$
Per evitare interpretazioni errate, vogliamo precisare che l'ultima uguaglianza si deve intendere come uguaglianza tra insiemi. Quindi non stiamo affermando che $\sqrt{a^2} = a$. Ma di questo ci occuperemo nel dettaglio in uno degli approfondimenti che seguono.

Per rispondere al quesito non ci resta allora che individuare quale equazione, tra quelle indicate nel testo del quesito, *non* ha insieme delle soluzioni uguale ad S.
A tale proposito vediamo immediatamente che l'equazione
$$x = a$$
ha insieme delle soluzioni
$$\{a\},$$
il quale è diverso da S per *ogni* valore di a, dato che per ipotesi $a \neq 0$.

Abbiamo così risposto. È comunque istruttivo verificare che le altre equazioni proposte hanno tutte insieme soluzione uguale ad S. Anche di questo ci occuperemo in uno degli approfondimenti seguenti.

Un approccio algebrico. Risolviamo le equazioni.

È istruttivo determinare esplicitamente le soluzioni delle equazioni in esame. Per farlo seguiamo in questa sezione un approccio algebrico, anche se esso non costituisce necessariamente la modalità più indicata per affrontare il quesito in esame.

- Abbiamo già visto che l'equazione
$$x^2 = a^2$$
ha soluzioni $\sqrt{a^2}$ e $-\sqrt{a^2}$.
Vediamo ora come scrivere tali espressioni in una forma più semplice. Conviene distinguere i casi: $a > 0$ e $a < 0$.
Nel primo caso vale $\sqrt{a^2} = a$. Dunque $-\sqrt{a^2} = -a$.
Se invece $a < 0$, si ha $\sqrt{a^2} = -a$: infatti $-a$ è l'unico numero *positivo* che elevato al quadrato è uguale all'argomento della radice, ossia tale che $(-a)^2 = a^2$.
Allora $-\sqrt{a^2} = -(-a) = a$.
In definitiva, sia per $a > 0$ che per $a < 0$, l'insieme delle soluzioni della nostra equazione è
$$S = \{-a, a\}\,.$$

- In modo analogo si può esaminare l'equazione $x^4 = a^4$.

- Per la legge di annullamento del prodotto
$$(x + a)|x - a| = 0 \qquad (*)$$
se e solo se
$$x + a = 0 \;\text{ o }\; |x - a| = 0.$$
Evidentemente l'equazione $x + a = 0$ ha come unica soluzione $x = a$.
Invece l'equazione $|x - a| = 0$ è equivalente all'equazione $x - a = 0$ e ammette come soluzione solo $x = -a$.
In definitiva l'insieme delle soluzioni dell'equazione (*) è ancora $\{-a, a\}$.

- Resta infine da esaminare l'equazione $|x| = |a|$.
Allo scopo è utile osservare che se c e d sono due numeri e d è positivo, vale
$$|c| = d$$
se e solo se
$$c = d \text{ oppure } c = -d.$$
Consideriamo allora il caso $a > 0$ (e quindi $|a| = a$): l'equazione in esame si riduce alla equazione $|x| = a$. Per quanto appena osservato, le sue soluzioni sono $x = -a$ ed $x = a$.
Invece nel caso $a < 0$ vale $|a| = -a$ e quindi l'equazione diventa $|x| = -a$. Ragionando come nel caso precedente, si trova che le sue soluzioni sono $x = -(-a) = a$ e $x = -a$.
Dunque, in entrambi i casi, l'insieme delle soluzioni è ancora uguale ad S.

Un approccio basato sul numero di soluzioni.

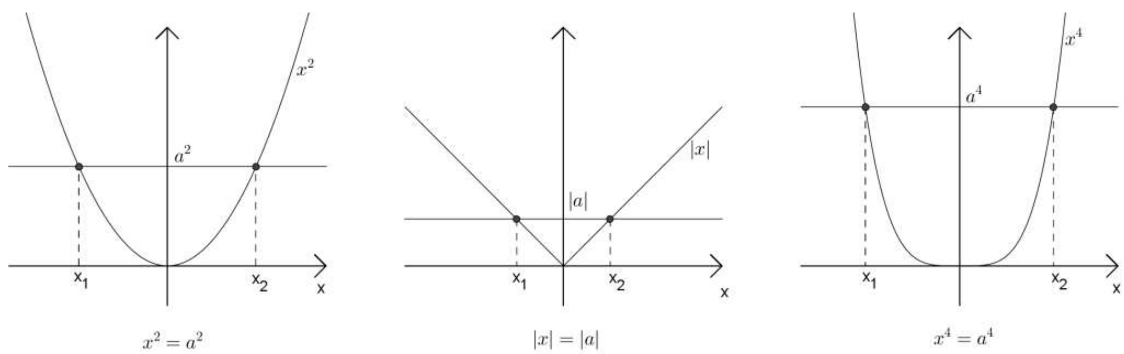
Le equazioni che compaiono nel testo del quesito sono di grado maggiore o uguale a 2, a parte l'equazione contenente il modulo (che, come vedremo, è comunque equivalente ad una equazione di secondo grado) e l'equazione $x = a$.

Allora se tutte queste, eccetto una, avessero due soluzioni, avremmo individuato l'equazione non equivalente.
In altre parole, sembra che una strategia percorribile sia quella di confrontare le equazioni solo

per *numero* di soluzioni, senza preoccuparsi di determinarle esplicitamente.

Analizziamo prima l'equazione $(x+a)|x-a| = 0 \quad (*)$.
Per la legge di annullamento del prodotto, l'uguaglianza vale se e solo se $x + a = 0$ oppure $x - a = 0$.
L'equazione $(*)$ ha quindi *due* soluzioni, dato che $a \neq 0$ per ipotesi.

Scegliamo invece di interpretare *graficamente* le altre equazioni in esame, potendo così contare su un'efficace visione d'insieme. Sarebbe comunque altrettanto corretto produrre argomentazioni di carattere algebrico.
Facciamo dunque riferimento alla seguente figura, in cui abbiamo fissato un valore per a, senza per questo perdere in generalità.



Consideriamo, ad esempio, l'equazione $x^2 = a^2$.
Come osservato nel commento al quesito 2, controlliamo se la retta orizzontale $y = a^2$, per $a \neq 0$, interseca il grafico della funzione x^2 in qualche punto: le soluzioni dell'equazione sono le ascisse di tali punti; in questo caso, x_1, x_2.
In modo analogo ci convinciamo che le altre due equazioni ammettono due soluzioni ciascuna.

Concludiamo allora che l'equazione $x = a$ è l'unica ad avere una sola soluzione. Quindi non può essere equivalente a nessuna delle altre.

Un approccio fondato sulle uguaglianze numeriche

Partiamo da alcune considerazioni sulle uguaglianze tra numeri.
Dall'uguaglianza $c^2 = d^2$ non segue necessariamente $c = d$: basta considerare, ad esempio, il caso $c = -2$ e $d = 2$.
Ma, se $c \geq 0$ e $d \geq 0$, si ha
$$c^2 = d^2 \Leftrightarrow c = d.$$
Torniamo allora alle equazioni
$$x^2 = a^2 \qquad |x| = |a| \qquad x^4 = a^4.$$
I loro membri sono non negativi per ogni x. Dunque, anche per quanto ora osservato, si ha
$$|x| = |a| \Leftrightarrow |x|^2 = |a|^2 \Leftrightarrow x^2 = a^2 \Leftrightarrow x^4 = a^4.$$
Rimane da giustificare l'equivalenza tra l'equazione $(x+a)|x-a| = 0$ e, ad esempio, l'equazione $x^2 = a^2$.
A tale fine basta ripercorrere uno qualsiasi dei ragionamenti illustrati negli altri approfondimenti al quesito.

Concludiamo così che l'unica equazione non equivalente tra quelle proposte è l'equazione $x = a$.