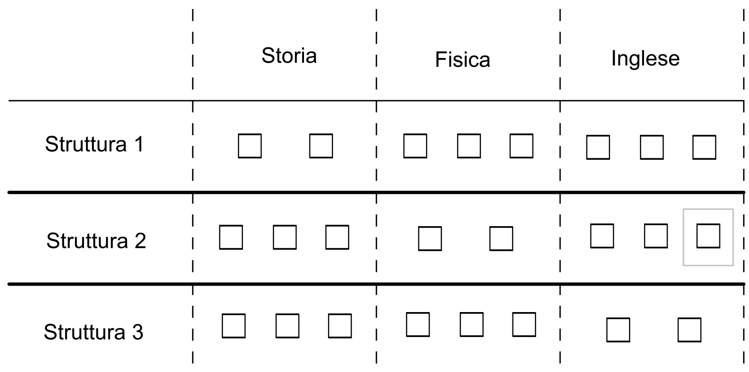
Quesito 25

Osserviamo innanzitutto che ogni prova deve essere costituita da

> 8 *quesiti:* 2 *di una disciplina,* 3 *di un'altra e* 3 *della rimanente disciplina coinvolta.*

Pertanto le possibili strutture delle prove possono essere schematizzate come di seguito:



Soffermiamoci ora ad analizzare le prove più nel dettaglio. Concentriamoci, ad esempio, su quelle che hanno struttura del primo tipo, ossia prove costituite da 2 domande di storia, 3 di fisica e 3 di inglese.
Quante prove di questa forma si possono predisporre?
Ebbene, restano da scegliere solo le domande di storia: due, tra le tre prodotte. Perciò, se indichiamo tali domande con A, B, C, gli unici schemi possibili per le prove del primo tipo sono:

$$AB \quad AC \quad BC.$$

Con analoghi ragionamenti deduciamo che ciascuno degli altri due tipi di verifica si può realizzare in 3 modi.
In definitiva vi sono 3 modi possibili per ciascuna delle 3 strutture di prova. E dunque vi sono

$$3 \cdot 3 = 9$$

possibili prove del tipo richiesto.

Un'altra strategia: considerare i quesiti non scelti

I numeri che intervengono nel caso in esame suggeriscono anche un approccio diverso, altrettanto valido.

Osserviamo infatti che vengono predisposti in totale 9 quesiti e che ogni prova è costituita da 8 di essi. Possiamo allora pensare di costruire ciascuna verifica scegliendo quale tra i 9 quesiti a disposizione *non* deve far parte di essa.

Tale scelta può essere operata in 9 modi, tanti quanti i quesiti a disposizione. Pertanto, 9 sono anche le possibili prove.

Contare gli elementi di un insieme. Applicare una formula o ri-costruirla?

Visti i numeri in gioco, abbiamo scelto di elencare i casi possibili. Ma come si potrebbe fare se per ciascuna delle tre discipline dovessimo scegliere m domande tra le n predisposte?

Quanto proponiamo di seguito è rivolto allo studente che ha già affrontato problemi analoghi. Vogliamo mostrare come sia possibile, anzi auspicabile, approcciare tali situazioni senza scegliere da un elenco preconfezionato la formula da applicare. Piuttosto lo studente dovrebbe ri-costruire, nella situazione in esame, un'espressione che fornisca il numero dei casi possibili.

Per prendere confidenza con il problema, conviene prima esamininare alcune situazioni particolari, ad esempio $n = 3$ ed $m = 2$ (proprio quella discussa nel quesito). Sulla base di queste prove si può provare a *congetturare* il risultato generale.

- Per *ogni* scelta della prima domanda (tra n), rimangono a disposizione altre $n-1$ scelte per la seconda, $n-2$ per la terza, ... e quindi $n-m+1$ per la m−esima. Dunque, fin qui il numero d delle prove *sembra* essere:

$$d = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

- Però nel conteggio non si è considerato il fatto che l'ordine di scelta non conta. Ad esempio nella situazione del quesito le scelte AC e CA identificano lo stesso segmento di prova.
  I modi possibili sono allora meno.
  Precisamente, se $m = 2$ basta dividere per 2.
  Se invece $m = 3$, possiamo pensare che una volta fissate le tre domande da inserire nella prova (ad esempio, B, D, F), tutti i loro riordinamenti (detti anche *permutazioni*) identifichino lo stesso segmento di prova (nell'esempio, FBD, DBF, $\ldots$). Così abbiamo 3 modi di scegliere la prima e, *per ciascuno* di essi, 2 modi di scegliere la seconda; in definitiva $3 \cdot 2 = 6$ modi.
  Analogamente, fissate le m domande da inserire, il numero p di modi in cui esse possono essere riordinate è

$$p = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Come utilizzare i numeri d e p per determinare il numero c di prove possibili per ciascuna delle tre discipline?
  Abbiamo visto che ciascuna delle c prove è identificata dalle domande che la costituiscono, indipendentemente dall'ordine in cui esse compaiono. Sappiamo pure che, per *ogni* scelta delle m domande da inserire nella prova, vi sono p loro riordinamenti. Pertanto deve valere:

$$c \cdot p = d$$

  e quindi

$$c = \frac{p}{d}.$$

- Concludiamo allora che le prove possibili sono

$$3 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

  Tali tipi di raggruppamenti sono anche noti con il nome di *combinazioni di n oggetti presi m ad m.*

Infine possiamo *controllare* la validità della formula trovata, sostituendo specifici valori alle lettere n ed m e confrontando il risultato con quanto si ottiene per elencazione dei casi possibili.