UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

Quesito 23

Una possibile strategia per affrontare il quesito consiste nel sondare la validità delle disuguaglianze proposte, fissando opportuni valori per b e per c.
Naturalmente essi sono vincolati a verificare le condizioni indicate nel testo: $b < 0$ e $c + b < 0$.
Per semplicità scegliamo $b = -1$ e $c = 0$.

Per tali valori la disuguaglianza $bc^2 + c^3 > 0$ si riduce alla disuguaglianza

$$0 + 0 > 0.$$

Essa è evidentemente falsa.

Analogamente, con tale sostituzione risultano false le disuguaglianze

$$c^2 + bc > 0 \qquad cb^2 + b^3 > 0.$$

Per esclusione deve allora essere vera la disuguaglianza

$$b^2 + bc > 0.$$

E così abbiamo risposto al quesito.

Un approccio diretto

La strategia risolutiva proposta prevede il ricorso alla sostituzione di valori numerici. Lo studente dovrebbe però essere in grado di individuare l'alternativa corretta anche seguendo un approccio più diretto.
Dovrebbe cioè in primo luogo riconoscere che è opportuno esprimere in fattori le espressioni che compaiono nelle alternative di risposta. E magari farlo solo a livello mentale.

A $\quad bc^2 + c^3 = c^2(b + c) > 0$

B $\quad c^2 + bc = c(c + b) > 0$

C $\quad cb^2 + b^3 > 0$

D $\quad b^2 + bc = b(b + c) > 0.$

A questo punto dovrebbe essergli chiaro che la disuguaglianza D è vera perchè si ottiene dalla disuguaglianza

$$b + c < 0$$

moltiplicando per un fattore *negativo* e quindi cambiando il verso da minore a maggiore.

Perchè le altre disuguaglianze sono false?

Vediamo di comprendere le *ragioni* per cui le disuguaglianze A, B, C sono false.
L'alternativa C si può scrivere nella forma

$$b^2(c + b) > 0.$$

Dato che il fattore b^2 è *positivo*, essa è equivalente a

$$c + b > 0.$$

Ma questa è proprio la condizione opposta a quella delle ipotesi.
Analogamente si arriva a concludere che è falsa l'alternativa A.

Più delicata è invece l'analisi dell'alternativa B. Pur essendo soddisfatta per opportuni valori di c (i negativi), non lo è per $c > 0$; in tal caso infatti essa equivale a

$$c + b > 0.$$

Che rappresenta proprio la condizione opposta a quella in ipotesi.

Provare la validità di una disuguaglianza

Nella prima risoluzione proposta abbiamo sfruttato il fatto che una sola tra le quattro alternative di risposta indicate è vera.
Senza procedere per esclusione come si può giustificare il fatto che la disuguaglianza D è vera?

Iniziamo osservando che tale disuguaglianza risulta sicuramente verificata per specifici valori attribuiti alle lettere b e c. Ad esempio per $b = -1$ e $c = 0$ essa si riduce a $0 + 1 > 0$.
Questo però non garantisce che sia soddisfatta per *ogni* b, c nelle ipotesi $b < 0$ e $b + c < 0$ (analogamente, il fatto che i numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ siano divisori di 60, non garantisce che tutti i numeri naturali siano divisori di 60).

Per affermare che una disuguaglianza è vera si deve produrre una *dimostrazione* che deve essere valida per *ogni* b, c.

Siano allora b, c due numeri, dei quali b negativo, che verificano la condizione

$$b + c < 0.$$

Possiamo manipolare questa disuguaglianza per ottenere

$$b^2 + bc > 0?$$

Certo. Basta moltiplicare entrambi i membri per il fattore b. Ora, essendo $b < 0$, si è effettivamente ottenuta una disuguaglianza equivalente a quella di partenza perchè ha il verso opposto.

Tutto questo per provare che una disuguaglianza è vera. Come si può invece concludere che una disuguaglianza è *falsa*?
Basta fornire specifici valori di b e c per i quali essa non vale. In tal caso si dice che si è fornito un *controesempio*.
La scelta $c = 0$ e $b = -1$, proposta nella risoluzione, è solo una tra le diverse possibili.