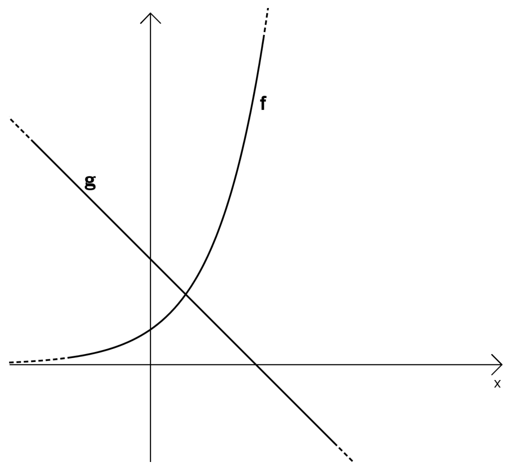
Quesito 2

Osserviamo innanzitutto che non viene chiesto di determinare le soluzioni, ma solo di indicare *quante* sono. D'altra parte si dovrebbe vedere rapidamente che non si riesce a trovare una formula esplicita per risolvere l'equazione.
Per questo ci si dovrebbe accorgere che è conveniente interpretare la questione nel linguaggio delle funzioni e dal punto di vista *grafico*.

Dovrebbe cioè venire in mente che si può pensare $2^x + x$ come una funzione che ad ogni valore della variabile x associa il numero $2^x + x$.
Se però lo studente incontra difficoltà nel rappresentare il grafico della funzione, può provare a scrivere l'equazione in una forma equivalente, quale:

$$2^x = 3 - x.$$

A questo punto si possono indicare con f e g le funzioni definite da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 3 - x$.
Il prossimo passo consiste nel tracciare i loro grafici.



Il quesito si può così riformulare nei seguenti termini:

in quanti punti il grafico della funzione f interseca quello della funzione g?

La figura suggerisce chiaramente che i due grafici si incontrano in un unico punto. La risposta corretta è la B.
Le ragioni che portano a tale conclusione verranno precisate in uno degli approfondimenti al quesito.

Numero di soluzioni e proprietà intuitive delle funzioni elementari

Lo studente dovrebbe avere una conoscenza intuitiva delle funzioni elementari considerate, in base alla quale vedere che in qualche punto la funzione f è maggiore della funzione g ed in qualche altro punto è invece minore di g. E quindi, anche senza bisogno di fare ricorso ad una nozione rigorosa di continuità, in un punto le due funzioni devono assumere valori uguali.
In effetti è abbastanza facile notare che $f(1) = g(1)$, ma questa osservazione non è necessaria per rispondere al quesito.

La funzione f è strettamente crescente, cioè *se il valore di x aumenta anche il numero 2^x aumenta*. Invece la funzione g è strettamente decrescente, ossia se il valore di x aumenta il numero $3 - x$ diminuisce.
Pertanto non possono esserci altri valori di x in cui $f(x) = g(x)$.

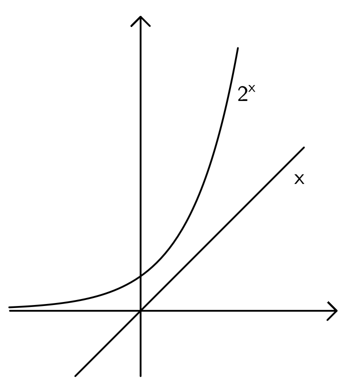
La funzione $2^x + x$

Vediamo come si può rispondere al quesito in esame considerando direttamente la funzione h definita da $h(x) = 2^x + x$.
L' approccio che ora proponiamo forse non è quello che più naturalmente viene in mente ad uno studente di scuola secondaria, ma riteniamo che sia un modo efficiente e generale di pensare a questo tipo di problemi. E prevede il ricorso a competenze significative per seguire con profitto un corso di laurea scientifico.

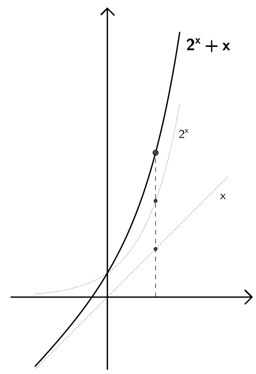
Lo studente dovrebbe arrivare a pensare che la funzione h è *strettamente crescente*, ossia

se il valore di x aumenta, anche il numero $2^x + x$ aumenta

Tale proprietà di h viene in mente più facilmente se si hanno ben presenti i grafici delle funzioni 2^x e x, che si vedono in figura



Lo studente dovrebbe anche riuscire a rappresentare qualitativamente il grafico della funzione h, ottenendolo come " somma" dei due grafici della figura precedente



Inoltre dovrebbe avere una conoscenza intuitiva delle funzioni elementari considerate, in base alla quale accorgersi che in qualche punto la funzione h è maggiore di 3 ed in qualche punto è minore di 3. E quindi essa deve assumere anche il valore 3.
In effetti è abbastanza facile notare che $h(1) = 3$, ma questa osservazione non è necessaria per rispondere al quesito.

Poichè la funzione è strettamente crescente, non possono esserci altri valori di x dove $h(x) = 3$. In conclusione la risposta corretta è 1.

Interpretazione grafica di equazioni della forma $f(x) = g(x)$

Consideriamo l'equazione definita da

$$f(x) = g(x).$$

Un numero c è *soluzione* dell'equazione se, sostituito alla x, rende vera l'uguaglianza. Ossia se

$$f(c) = g(c) \quad (*).$$

Qual è il significato *grafico* di tale uguaglianza?

Per rispondere dobbiamo considerare il punto $(c, f(c))$, che appartiene all grafico della funzione f, ed il punto $(c, g(c))$, che invece appartiene al grafico di g.
La condizione di uguaglianza $(*)$ dice che tali punti coincidono, ossia

$$(c, f(c)) = (c, g(c))\,.$$

In altre parole, il numero c è soluzione dell'equazione in esame se e solo se i grafici delle due funzioni f e g si incontrano nel loro punto di ascissa $x = c$.
In particolare, ogni soluzione è l'*ascissa* di un punto di intersezione dei due grafici e si legge quindi sull'asse x.

Quali equazioni considerare nel caso in esame?

Per interpretare efficacemente il quesito dal punto di vista grafico, si può ricorrere anche ad equazioni diverse da quelle proposte, purché equivalenti all'equazione $2^x + x = 3$.

Ad esempio è conveniente considerare l'equazione:

$$x = 3 - 2^x,$$

oppure l'equazione

$$2^x - 3 = -x.$$

Infatti i membri di tali equazioni sono costituiti solo da funzioni "esponenziali" oppure solo da funzioni lineari. E di queste funzioni lo studente dovrebbe saper tracciare rapidamente i grafici.