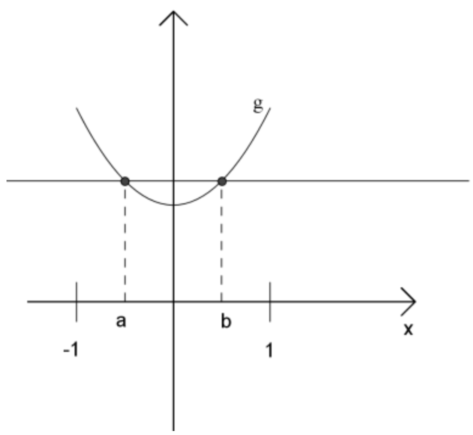
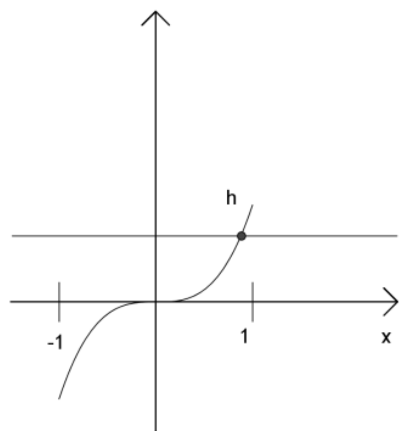
Quesito 19

Conviene tracciare i grafici della funzioni g ed h ed interpretare la proprietà T dal punto di vista *grafico*.

Una funzione f, definita sull'intervallo $[-1, 1]$, ha la proprietà T se vi sono due punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ del suo grafico, che sono distinti (nel testo "$a \neq b$") e che si trovano sulla stessa retta orizzontale (nel testo "$f(a) = f(b)$", ossia hanno la stessa ordinata).

Dovremo allora controllare se ciascuno dei due grafici in esame ha punti distinti che stanno sulla stessa retta orizzontale.





Come possiamo vedere, i punti del grafico di g che hanno ascissa $a = -\dfrac{1}{2}$ e $b = \dfrac{1}{2}$ stanno sulla stessa retta orizzontale. Vi sono anche altre coppie di punti che hanno tale proprietà, ma quanto osservato per la coppia indicata è sufficiente per affermare che la funzione g ha la proprietà T.

Invece non esistono due punti del grafico della funzione h che si trovano sulla stessa retta orizzontale, ossia alla "stessa altezza".
Dunque h *non* ha la proprietà T.

Alcune precisazioni

Abbiamo osservato che i punti di ascissa $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$ si trovano sulla stessa retta orizzontale.
Meglio *controllare* tale affermazione, ad esempio confrontando i valori assunti dalla funzione g in tali punti:

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \qquad\qquad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

In effetti i due valori coincidono.

Inoltre abbiamo osservato che non esistono due punti distinti del grafico della funzione h che si trovano sulla stessa retta orizzontale.
Per giustificare questo fatto è sufficiente ricorrere alla *stretta crescenza* della funzione h. Essa si esprime dicendo che dati due punti c, d se $c < d$ allora $h(c) < h(d)$. Do ciò discende che se $c \neq d$ allora $h(c) \neq h(d)$, la cui interpretazione grafica dovrebbe ormai essere evidente.

La proprietà T

In realtà il grafico di g è addirittura costituito da infinite coppie di punti che si trovano su una stessa retta orizzontale. Infatti per ogni numero $a \in [-1, 0)$, la coppia a e $b = -a$ verifica l'uguaglianza $g(a) = g(b)$.
Tale proprietà discende dalla simmetria del grafico di g rispetto all'asse y.
Oppure, volendo utilizzare il linguaggio dell'algebra, si può pensare che tale proprietà segua dall'uguaglianza $(-a)^2 = a^2$.

Consideriamo ora la funzione h. Per provare che per essa T non vale abbiamo fatto ricorso alla stretta crescenza di h. In realtà è sufficiente utilizzare una proprietà più debole:

se $a \neq b$ allora vale $h(a) \neq h(b)$.

Lo studente può accontentarsi di giustificarla mediante la seguente argomentazione:
se a e b sono numeri reali e $a \neq b$, allora anche $a \cdot a \cdot a \neq b \cdot b \cdot b$.

Per completezza osserviamo che una funzione ha la proprietà T se per essa non vale un'importante proprietà, nota come *iniettività*:

una funzione f, definita su un insieme D, si dice iniettiva se per ogni $a, b \in D$ tali che $a \neq b$, vale $f(a) \neq f(b)$.