Quesito 17

L'equazione in esame ha 2 soluzioni, che indichiamo con x_1, x_2. Si chiede di determinare il loro prodotto $x_1 \cdot x_2$.

Si possono prima ricavare esplicitamente le due soluzioni, ricorrendo alla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{7}}{2} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{7}}{2}.$$

Pertanto il loro prodotto è

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-3-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{-3+\sqrt{7}}{2} = \frac{9-7}{4} = \frac{1}{2}.$$

C'è anche una strategia alternativa

Per determinare il prodotto richiesto non è necessario calcolare esplicitamente le soluzioni dell'equazione. Vediamo come si può fare.

Iniziamo scrivendo l'equazione nella forma equivalente

$$x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0.$$

In questo modo il coefficiente del termine relativo ad x^2 è 1.

Consideriamo ora il polinomio $p(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ e puntiamo ad esprimere tale espressione in funzione delle radici del polinomio

$$x^2 + 3x + \frac{1}{2} = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + (-x_1 - x_2)x + x_1 \cdot x_2.$$

Abbiamo ora fatto ricorso ad un risultato generale relativo alla fattorizzazione dei polinomi di secondo grado, che discutiamo in un altro approfondimento relativo al quesito in esame.
In ogni caso l'ultima uguaglianza ci dice che il *termine noto* di p è uguale proprio a $x_1 \cdot x_2$. Possiamo così concludere che

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2}.$$

Esattamente quanto trovato prima mediante il calcolo esplicito delle radici.

Fattorizzazione di un polinomio di secondo grado

Consideriamo un polinomio di secondo grado $p(x) = x^2 + bx + c$, dove b, c sono numeri reali; e supponiamo che esso abbia due radici reali x_1 ed x_2. Allora $p(x)$ si può scrivere nella forma

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Per dimostrarlo dividiamo $p(x)$ per $x - x_1$: otteniamo come quoziente un polinomio $q(x)$ e come resto un *numero* r (il grado del resto deve essere minore di quello del polinomio $x - x_1$). In altre parole, il polinomio $p(x)$ si può così esprimere

$$p(x) = (x - x_1)q(x) + r.$$

In realtà vale

$$r = 0.$$

Infatti:
$p(x_1) = 0$, visto che x_1 è una radice di $p(x)$.
Ma deve essere anche
$p(x_1) = r$, dato che $p(x_1) = 0 \cdot q(x_1) + r = r$.
In definitiva, $p(x_1)$ è uguale a 0 ma anche ad r. Quindi $r = 0$.

Possiamo riassumere quanto fin qui trovato, dicendo che
se il polinomio $p(x)$ ha una radice x_1, allora p è divisibile per $x - x_1$, ossia

$$p(x) = (x - x_1)q(x) \quad \text{dove } q(x) \text{ è un polinomio di primo grado.}$$

Inoltre, il coefficiente del termine di $q(x)$ di grado maggiore è 1, visto che deve essere 1 anche il coefficiente del termine di $p(x)$ di grado maggiore .
In definitiva

$$q(x) = x + d, \quad \text{dove } d \text{ è un numero opportuno.}$$

Ma allora

$$p(-d) = 0, \text{ ossia } -d \text{ deve essere una radice di } p(x).$$

Concludiamo così che

$$d = -x_2.$$

Ancora sulla fattorizzazione di polinomi di secondo grado

Abbiamo visto che ogni polinomio $p(x)$ di secondo grado che ha coefficiente del termine in x^2 uguale ad 1 e due radici reali x_1 ed x_2, si può scrivere nella forma

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Più in generale, ogni polinomio di secondo grado $q(x) = ax^2 + bx + c$ (dove a, b, c sono numeri reali) che abbia due radici reali x_1 ed x_2, si può esprimere nel modo seguente

$$q(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Basta infatti osservare che

$$q(x) = a \cdot t(x),$$

dove $t(x)$ è un polinomio di secondo grado che ha coefficiente del termine in x^2 uguale ad 1.
Inoltre $t(x)$ ha le stesse radici di $q(x)$.
Quindi, per quanto visto nel caso $a = 1$, si ha

$$t(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

E così abbiamo concluso.