Quesito 15

Non si chiede di trovare la soluzione dell'equazione, ma di decidere quale relazione è verificata. Possiamo comunque provare a risolvere l'equazione.

Lo studente dovrebbe subito riconoscere l'opportunità di esprimere $\sqrt{5}$ per mezzo della funzione esponenziale di base 5:

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}.$$

Può così scrivere l'equazione in esame nella forma

$$1 = 5^{x+\frac{1}{2}}.$$

Ciò equivale a dire che

$$x + \frac{1}{2} = 0,$$

pertanto

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Allora è evidente che è verificata la relazione $-1 < x < 0$ e soltanto essa.

Equivalenza di equazioni e proprietà della funzione 5^x

Nella risoluzione abbiamo affermato che le due equazioni

$$1 = 5^{x+\frac{1}{2}}$$

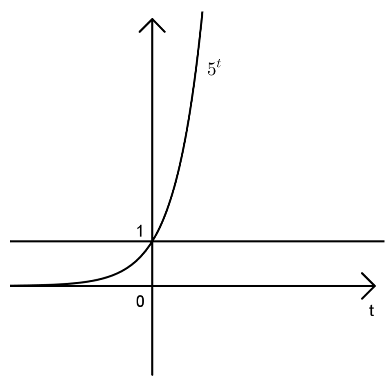
e

$$x + \frac{1}{2} = 0$$

sono equivalenti.
Questo fatto è una conseguenza della ben nota proprietà

$$5^t = 1 \Leftrightarrow t = 0$$

che si può visualizzare graficamente in questo modo



Un altro approccio algebrico

Esaminiamo ora un approccio analogo a quello proposto ma che si può utilizzare in molti più casi. L'idea è di puntare a scrivere l'equazione nella forma

$$5^a = 5^b$$

dove a, b sono due opportune espressioni.

Sfruttiamo allora nuovamente l'uguaglianza $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ per ottenere

$$5^0 = 5^{x+\frac{1}{2}}.$$

A questo punto possiamo concludere dato che questa l'equazione è equivalente all'equazione

$$0 = x + \frac{1}{2},$$

che ha soluzione $x = -\frac{1}{2}$.

Equivalenza di equazioni ed iniettività

Lo studente sapere che l'equivalenza di $5^a = 5^b$ e $a = b$ è una conseguenza diretta della proprietà della *funzione* esponenziale $f(x) = 5^x$:

siano a, b due numeri per cui vale $f(a) = f(b)$*; allora deve essere* $a = b$*.*

Tale proprietà ha il nome di *iniettività*.

Alcune tra le funzioni elementari, come la funzione x^3, sono iniettive. Altre non lo sono.

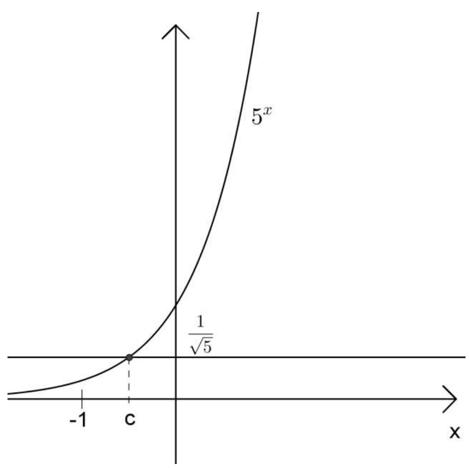
Ad esempio non è iniettiva la funzione seno: infatti l'uguaglianza $\sin a = \sin b$, non implica l'uguaglianza $a = b$.
Questo fatto ha una ricaduta notevole sulla risoluzione delle equazioni trigonometriche: dall'uguaglianza $\sin a = \sin b$ si possono ancora trarre informazioni sui valori di a e b, ma sfruttando altre proprietà della funzione seno.

Un approccio grafico

L'equazione in esame può essere scritta anche nella forma

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = 5^x,$$

ed essere interpretata graficamente mediante il grafico della funzione $f(x) = 5^x$, in modo analogo a quanto indicato nella risoluzione del quesito 2.



Il grafico suggerisce che il punto di intersezione ha ascissa c negativa. Essa è la soluzione dell'equazione in esame.

Per stimare c con maggior precisione, possiamo calcolare il valore di f in opportuni punti. Ad esempio in $x = 0$, $x = -1$. E poi confrontare i valori ottenuti con il valore di f in c.
Vale:

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = \frac{1}{5}, \quad f(c) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Quindi

$$f(-1) < f(c) < f(0).$$

Allora, visto che f è crescente, concludiamo che

$$-1 < c < 0.$$

Analogamente a quanto osservato per il quesito 2, stiamo dando per scontato che l'equazione in esame abbia soluzione. In altre parole, stiamo sfruttando il fatto che la funzione esponenziale assume *tutti* i valori positivi: per ogni $d > 0$ esiste un numero x tale che $f(x) = d$.